Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Christoph Brackenhofer — Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 8
Abgabe: 20.12.2022, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).

(a) Bestimme den Grad $[k : \mathbb{Q}]$, wobei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}(i)$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$.

(b) Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$.

(c) Seien p und q (positive) Primzahlen. Bestimme, wann die Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ von $\mathbb{R}$ gleich sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Die komplexe Zahl $\alpha = \sqrt[5]{2}e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$. Bestimme sein Minimalpolynom $m_\alpha(T)$ über $\mathbb{Q}$ (begründe, warum es irreduzibel ist!) und berechne das multiplikative Inverse von $1+\alpha+\alpha^3$ bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{\deg(m_\alpha)-1}\}$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Aufgabe 3 (8 Punkte). Sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung.

(a) Zeige direkt aus der Definition, dass $k(a, b) = k(a)(b)$ für a und b aus K.

(b) Schließe daraus, dass $k(a_1, \ldots, a_n) = k[a_1, \ldots, a_n]$ für Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus K, welche jeweils algebraisch über k sind.

Nun sei $R_0 = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$.

c) Zeige, dass R_0 ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist.

   Hinweis: Der Grad ist multiplikativ.

d) Für $1 \geq n$ aus $\mathbb{N}$ zeige, dass das Polynom $T^n - 2$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist (d.h. irreduzibel als Element von $\mathbb{Q}[T]$).

e) Schließe daraus, dass die algebraische Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset R_0$ nicht endlich ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte).

Sei $k \subset K$ eine endliche Körpererweiterung sowie $P(T)$ ein irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus k derart, dass der Grad $\deg(P)$ den Grad $[K : k]$ der Körpererweiterung nicht teilt.

Besitzt $P(T)$ Nullstellen in K?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.